

منشورات الجامعة اللبنانية

قسم الدراسات الرياضية

١

إحياء الجبر

درس لكتاب الخوارزمي في «الجبر والمقابلة»

بقلم

عادل أسوبا

من أساتذة الرياضيات في الجامعة اللبنانية

الطبعة الثانية



بيروت

١٩٦٨

منشورات الجامعة اللبنانية

قسم الدراسات الرياضية

١

إحياء الجبر

درس لكتاب الخوارزمي في «الجبر والمقابلة»

بقلم

عادل انجوبا

من أساتذة الرياضيات في الجامعة اللبنانية



بيروت ١٩٦٨

هوذا الحلقة الاولى من منشورات الجامعة اللبنانية ، في قسم الدراسات الرياضية . خصصناها برجل ينزل اسمه من تاريخ علم الجبر منزلة اسم ارسطاطاليس من تاريخ المنطق . فعملنا ، جهد المستطاع ، على تعريف الخوارزمي الى ابنا الضاد ، وعلى قدر جهده الكبير في تفسير الجبر ، ذاك العلم الجديد على العالم اذ ذاك ، والذي كان من حظّه ان يبلغ هذه المرتبة الفائقة في العلوم الرياضية غايةً ووسيلة . فيعرف الخلف فضل السلف ، ويستأنفون ما انقطع من ابّحاث واختبارات وتحريات في خدمة الانسانية ، بخدمة العلم والعمل .

وسيتلو هذه الحلقة ، باذن الله ، وجهد اساتذتنا ، حلقات عديدة تؤهل جامعتنا الناشئة للاضطلاع بواجباتها ، الى جانب ما تقوم به من منشورات قيّمة اختاها الكبيرتان في بيروت . فيسعدّها أن تأتي ، وان متأخرة ، بهذه الحجارة البسيطة في صرح الثقافة العامّة .

مقدمة

كثيراً ما يفاخر العرب بماضيهم الادبي ، غافلين عن ايامهم العلمية الرائعة التي جعلتهم مدة عصور في طليعة الامم الراقية ، وبوأتهم منزلة رفيعة في مضمار تنافس فيه قرائح العلماء وجهود الدول والشعوب . والاديب العربي ، في جهله تاريخه العلمي ، ليس له عذر الغربي الذي لا يطالع مصنفات نيوتن وغوص ، ذلك أن هذه المصنفات لا تفتح الا للاختصاصيين . اما العلوم العربية ، في عصرها الذهبي ، اي في عهد الخوارزمي ، والبوزجاني ، والبتاني ، وامثالهم ، فهي لا تبعد عن تناول الرجل المثقف في عصرنا .

وقد رأى رئيس الجامعة اللبنانية ، استاذنا الجليل الاستاذ فؤاد افرام البستاني ، ان يسدّ فراغاً في ثقافة الطالب والأديب ، فنظم في قسم « الدراسات الرياضية » ، سلسلة من المحاضرات العلمية تتناول تطورات الفكرة الرياضية خاصة في تاريخها الطويل ، وتعرّف الى الجمهور العربي روائع المؤلفات القديمة ، وتبعث فيه حبّ ماضيه المجيد . والكل يعلم ما للاستاذ الكريم من الجهود البالغة في نشر تاريخ العرب وآدابهم وثقافتهم . فلا عجب اذا اضاف الى مساعيه الماضية مجهوداً جديداً .

وقد تفضل ووكّل الينا تعريف كتاب الخوارزمي في « الجبر والمقابلة » . فكان هذا البحث نتيجة محاضرتين من تلك السلسلة . وقد حاولنا فيه ان نبين ما لكتاب الخوارزمي من القيمة الانسانية ، الى جانب قيمته العلمية ، متعمدين البساطة في شروحها الى ابعد حدودها . واعتمدنا ، في دراستنا ، على طبعة روزن ، سنة ١٨٣١ في لندن . وهي نادرة الوجود ، حظينا بنسخة منها في المكتبة الشرقية في بيروت ،

وعلى طبعة مصر، سنة ١٩٣٩، للاستاذين علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسى احمد،
وعنها نقلنا الشواهد التي اوردناها من «كتاب الجبر والمقابلة». كما اننا اعتمدنا
على الترجمة اللاتينية لكتاب الخوارزمي لروبرت الشستري، التي نشرها كاربنسكي
سنة ١٩١٥، مع ترجمة انكليزية، في منشورات جامعة ميشغان. وقد وجدنا منها
نسخة في مكتبة الجامعة الاميركية، في بيروت.

ولما كانت النسخة التي طبع عنها الكتاب قد انجزت سنة ٧٤٣ هـ. اي بعد
وفاة الخوارزمي بنحو ٥٠٠ سنة، وهي النسخة الوحيدة المعروفة حتى اليوم، فلا
يسع الجزم انها صورة حرفية عن الاصل كما وضعه الخوارزمي، وبالفعل فان
القارىء يلحظ، في بعض المقاطع، اخطاء وتشويشاً بيتاً، ولم نر ان نتوقف عند
هذه القضية التي تخرج عن نطاق بحثنا.

ولنا الأمل بان لا يكون هذا البحث الاخير من نوعه في خدمة تاريخ العلم
عامة، والعربي منه خاصة.

عادل انوبيا

من اساتذة الرياضيات في الجامعة اللبنانية

الكتاب ومؤلفه

شهرة الكتاب نادرة هي المؤلفات العلمية ، التي نالت من الشهرة والرواج ، ما ناله كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة . فقد بقي هذا الكتاب ، منذ ظهوره في اوائل القرن التاسع للمسيح حتى القرن السادس عشر ، مثالا وحُجة في هذا العلم ؛ له فيه ما لاصول اقليدس من المئزلة الرفيعة عند المهندسين ولما لبطلميوس عند علماء الهيئة . يدل على قيمته عند العرب كثرة شروحه ومكانة شارحيه العلمية ، نذكر منهم ، اخذاً عن الفهرست ، سنان بن فتح ، وعبد الله بن الحسن الحاسب الصيدناني ، وأبا الوفاء البوزجاني الرياضي الشهير . قال ابن خلدون في مقدمته : « وشرحه كثير من اهل الاندلس فأجادوا ومن احسن شروحاته كتاب القرشي . » (ص ٤٨٤)

وتجاوزت شهرة الكتاب الشرق الى الغرب ، فتراء في القرون الوسطى مترجماً في اوروبة الى اللاتينية ، كما تُرجم ايضاً كتاب الخوارزمي في الحساب الهندي ، واصبح المؤلفان أساساً للتأليف الاوروبية الاولى في الحساب والجبر . وفي القرن السادس عشر ، اي بعد ظهور الكتاب بسبعة قرون ، كان كلردانو العالم الايطالي الشهير لا يزال يعتمد عليه في مؤلفه *Ars Magna* واضعاً الخوارزمي في عداد العباقره الاثني عشر الذين انجبتهم البشرية الى يومه .

وقد خلد التاريخ هذا الكتاب الشهير اذ دلّ باسمه على فرع واسع من الرياضيات ، جاءلاً لفظة الجبر على شفاه الملايين على ممر الاجيال . كما انه خلد اسم صاحبه الذي اصبح *Algorithm* في اللغتين الافرنسية والانكليزية ، يعرفون بها عن طريقة رياضية هامة ، وانقلب في الاسبانبة الى *Guarismo* للدلالة على الارقام والاعداد . ولا تسلم عن كل اللغات الاوروبية التي دخلتها لفظة الخوارزمي ولا عن الازياء الغريبة التي تنكرت بها^(١) .

(١) واليك امثلة عنها وردت في نسخ مختلفة من ترجمة الكتاب الى اللاتينية :

KARPINSKI, *Latin Translation of the Algebra of Al-Khowarismi*, p 66. Mahomet filius Mosi Algaurizin, Machumed filius Moyai Algaurizm, Mahumed filius Moyai Algaurizim, Mahumed filius Moyais algaorizim.

مباة الخوارزمي فمن يكون الخوارزمي هذا الذي ازدانت باسمه اهم لغات العالم ، والذي شغ كتابه في صباح عهد علمي زاهر طوقت انوازه ضفاف البحر الابيض من الشام الى المغرب ، وسمطت في سماء العراق والهند ؟
الحق يقال إن ما نعرفه عن حياته تزر عسير التحقيق ، وجوهر معلوماتنا وارد في «كتاب الفهرست» الذي تم تأليفه سنة ٩٨٧ ، اي بعد كتاب الخوارزمي بقرون ونصف تقريباً .
واليك النص :

« الخوارزمي واسمه محمد بن موسى واصله من خوارزم وكان منقطعاً الى خزانة الحكمة للمأمون وهو من اصحاب علوم الهيئة ، وكان الناس قبل الرصد وبعده يعولون على زيجيه الاول والثاني ، ويُعرفان بالسند هند ، وله من الكتب كتاب الزيج ... » (ص ٣٨٣)
وعليه فان الخليفة المأمون اقامه على القدم العلمي من خزانته ، حيث انقطع الى الجمع والمطالعة والتأليف ، زاهداً في الدنيا حتى آخر حياته ، مكباً على الدرس نهاراً وعلى الرصد ليلاً . وهو في كل اعماله امين دقيق كما برهن على ذلك في زيجيه ، الامر الذي حمل الناس على التعويل عليها والاخذ بمحتوياتها .

واننا اذا تأملنا الايام التي عاش فيها الخوارزمي ، ايام الترجمات اليونانية والسريانية والبهلوية والهندية ، لم نتمالك من الاعجاب والتأثر الشديد . كانت عاصمة العباسيين تعيش ، الى جانب عيشتها المترفة الالهية ، عيشة علمية فكرية متأججة . فالتوافل تحترق الثغور من مختلف الجهات الى بيزنطية والى الهند ، ضاربة في مناكب الارض منقبة باحثه ، والافكار في بغداد رفيقة لها في اسفارها لا تستقر بين القلق والامل ، فاذا ما عادت الى بلادها متقلة بالمخطوطات ونادى الرقباء بمجيئها ، كان ذلك اليوم يوم فرح وابتهاج في قصر الخليفة والعاصمة كلها . وتهاقت عليها جموع الادباء والعلماء مستفرين مُعجبين . ثم يُقبل المترجمون جماعات جماعات ، فينقلون المخطوطات الى لغة الفانحين ، وعلى رأس كل جماعة اديب أو عالم فاضل كابن لوقا البعلبكي ، وحنين بن اسحق ، وغيرهما من النوابع الذين تعطرت باسماهم الخالدة كتب العلم والادب . فاذا ما تم نقلها الى العربية ، تعددت منها النسخ ووُزعت على مختلف المدن والاقاليم . واقبل عليها طالبو المعرفة يستقون من فيضها . وبذلك يعم العلم ، ويزداد انتشار الحركة الفكرية^(١) .

(١) يذكر اليعقوبي المتوفى سنة ٨٩٣ تقريباً ، انه كان في عصره ، وهو عصر الخوارزمي ، أكثر من مئة وراق في بغداد منهم علماء مجيدون . فاذا قابلنا عددهم بعدد المكاتب الموجودة حالياً في بيروت ، حصلت لنا فكرة صحيحة عن الحالة الفكرية في بغداد آنذاك .

وطبيعي أن هذه الحملات العلمية كان يصحبها إبرز ما عند العرب من رجال المعرفة فيكلون اليهم امرّ الاطلاع والاختيار . وقد نقل الينا التاريخ ان المأمون أرسل الى ملك الروم في طلب الكتب الحجاج بن مطر وابن البطريق وغيرهما (الفهرست ص ٣٣٩) . وهذا ما ذكر أيضاً عن الخوارزمي الذي يقال إنه ، قبل استقراره في دار الحكمة ، سافر الى بلاد السند مندوباً للاتصال بعلماء الهند والاطلاع على حسابهم ، اذ كان لهم فيه الباع الطولى والشهرة الواسعة .

ولا يُعرف بالضبط البلاد التي زارها ، هذا ان صحّ سفره . ويروي رواية هذا السفر انه ، بعد عودته ، وضع تأليفه في الحساب الهندي وكتاب الجبر والمقابلة . وقد رأى بعض المؤرخين الاوربيين في مطلع القرن التاسع عشر ، اي في عهد تجديد الاستشراق ، اوجه شبه عديدة بين كتاب الخوارزمي وكتب الهند السابقة له ، الا ان السيد روده نفى مزاعمهم في مقال ممتع له في الجريدة الاسيوية مظهرًا فروقًا اساسية بين الجبر الهندي وجبر الخوارزمي . وكان وضعه لكتاب الحساب الهندي حول السنة ٨٢٥ ، ولكتاب الجبر والمقابلة حول السنة ٨٣٠ . وكانت وفاته سنة ٨٤٦ او ٨٤٧ ، حسب ابحاث المستشرق نلينو .

مزيا الكتاب

نتقل بعد هذا العرض الوجيز لحياة الخوارزمي ، الى كتابه في الجبر والمقابلة ، الذي كان له هذا الاثر العظيم في تاريخ العلم والانسانية ، باحثين في فصوله ، مُبَيِّنِينَ مَحَامِدَهُ وَمِزَاتِهِ ، والفروق التي تفصل بينه وبين الجبر الحديث .

يعرف الخوارزمي عن كتابه بقوله : «أَلَفْتُ مِنْ حِسَابِ الْجَبْرِ وَالْمُقَابَلَةِ كِتَابًا مُخْتَصَرًا حَاطِيًا لِلطَّيْفِ الْحِسَابِ وَجَلِيلَهُ ، لِمَا يَلِزَمُ النَّاسَ مِنْ الْحَاجَةِ إِلَيْهِ فِي مَوَارِيثِهِمْ وَوَصَايَاهُمْ وَفِي مَقَاسِمَتِهِمْ وَأَحْكَامِهِمْ وَتِجَارَتِهِمْ وَفِي جَمِيعِ مَا يَتَعَامَلُونَ بِهِ بَيْنَهُمْ مِنْ مَسَاحَةِ الْأَرْضِ وَكَرِّي الْأَنْهَارِ وَالْمُهَنْدَسَةِ وَغَيْرِ ذَلِكَ مِنْ وَجُوهِهِ وَفَنُونِهِ » (ص ١٦) .

ثم يقول : «ووجدت الأعداد التي يُحْتَاجُ إليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور وأموال وعدد مفرد لا ينسب إلى جذر ولا إلى مال» (ص ١٦) وقد استخرجوا من ذلك كله اسماً للكتاب وعرفوا عنه بكتاب الجبر والمقابلة وايضاً بالْمُخْتَصَرِ في الجبر والمقابلة . فالجبر إذاً ليس إلا فصلاً من علم الحساب^(١) ، او هو طريقة في حلِّ بعض العمليات الحسابية . إلا انه رغم حداثة تفرعه عن الحساب وارتباطه به فانه يظهر في كتاب الخوارزمي مجلداً علماً مستقلاً ذا شخصية خاصة . وهو في بدء عمره علمُ حلِّ المعادلات من الدرجة الاولى والثانية^(٢) ، واستعمالها في حلِّ القضايا الحسابية بوجه الخصوص . وقد بقي ضَمَنُ هذه الحدود حتى القرن السادس عشر .

وما يلفت انظار القارئ العصري لدى مُطالعتِهِ كتاب الخوارزمي النقاطُ التالية :

١ - يُجْهَلُ الخوارزمي الأعدادُ السلبية . ولا يستعمل من الأعداد الا الحسابية . طبعه الأعداد

ومعروف أننا ندرس اليوم في الجبر الابتدائي أعداداً مُوجِبَةً وأعداداً سلبية ،

(١) وجاء في طبعة مصر سهواً : «ألف من كتاب الجبر» .

(٢) وقد بقي عند العرب فصلاً من علم الحساب .

(٣) نواصل عمر الخيامي الى حل المعادلة من الدرجة الثالثة بالهندسة ؛ اما الحلّ الجبري فيعود فضله الى علماء إيطاليا الذين توصلوا اليه في اواسط القرن السادس عشر .

وفي الجبر المالي أعداداً وهمية . وكان الهنود أيام الخوارزمي ، ومن قبله ، ينظرون في الأعداد السلبية أيضاً ، وكانوا عارفين بقواعدها بوضوح ودقة وبمعنى الحلول السلبية في الأعمال الحسابية . ومن الخطأ القول أن الخوارزمي ينبذ في المعادلات الحلّ السلي كأنه مهمل له . فالحقيقة الناتجة من درس كتابه ، أنه يجمل وجود مثل هذه الأعداد ، أو أقل ما يقال إنه ليس في الكتاب دليل واضح على تعرفه بها .

٢ - والفرق الثاني بين الجبر الحديث وجبر الخوارزمي أن جبرنا اليوم رمزي ، أي أنه يدل بإشارات خاصة مقتضبة على عمليات الجمع والطرح والقسمة والضرب والتجذير ، والمساواة والمناقضة وغيرها ، وعلى المجاهيل والمعلومات ، ويرمي العلم الحديث إلى توسيع الرمية إلى أبعد حد ، لما فيها من الاختزال في التعبير وجمعها المعاني الكثيرة في مجال ضيق تتناوله العين بنظرة شاملة ، حتى إننا لنعجز أن نتصور جبرنا الحديث بكمياته الطويلة المعقدة معبراً عنه بدون رموز . ولكن الرمية ، إذا كانت آلة اختزالية رائعة ، فهي أكثر من ذلك بكثير ، وأغلب الظن أن واضعها أنفسهم لو علموا بإمكانياتها الواسعة لدعشوا من استنباط هو وليد قرائحهم لم يدركوا من معانيه إلا جزءاً يسيراً ، فإن الرمية قامت بقسط انشائي في علم الجبر مُساعدة على تسهيل قواعده وعلى تعميمها وتوحيدها . نورد مثلاً بسيطاً على ذلك هو رمز الأس (exposant) الذي مكّن من إيجاد قواعد بسيطة للضرب والقسمة ، وصهر في قاعدة واحدة قواعد مختلفة تتعلق بالجذور والكسور ، ومكّن من اكتشاف اللوغارذمات ، وأدّى مساعدة قوية في الاشتقاق (dérivation) والتأصيل (intégration). أما الجبر عند الخوارزمي فهو الجبر الناطق كما سماه مؤرخو الرياضيات ، أي أنه يعبر عن العمليات الحسابية بالكلام العادي . مثال ذلك « عشرة قسمتها قسمين ف ضربتُ أحد القسمين في الآخر ثم ضربتُ أحدهما في نفسه فصار المضروب في نفسه مثل أحد القسمين في الآخر أربع مرات ، فقياسه أن تجمل أحد القسمين شيئاً ، والآخر عشرة إلا شيئاً فتضرب شيئاً في عشرة الأشياء فتكون عشرة أشياء إلا ما لا ثم تضرب في أربعة لقولك أربع مرات... » الخ (ص ٣٤) .

ونعبر عن المسألة بالرموز الحديثة هكذا :

$$س^٢ = ٤ س (١٠ - س) = ٤٠ س - ٤ س^٢ \text{ فيكون } ٤٠ س = ٥ س^٢ \text{ س} = ٨$$

ويهل الخوارزمي الحلّ : س = صفراً .

ولا حاجة إلى التذليل بما لرموزنا من بلاغة التمييز وسهولة الاداء ، فيظهر المعنى من خلالها شفافاً . ومع ذلك فتعبير الخوارزمي غاية في الوضوح أيضاً ، ومن يتبعه على مهل لا يفوته منه شيء .

ويجهل الخوارزمي استعمال الحروف للدلالة على المجاهيل^(١)، وبالأحرى للدلالة على المعلومات. ويرجع فضل الإشارة الى المعلومات بالحروف الى فرنسوا فيات الافرنسي (François Viète) ووضعه هذا يعد حقاً خطوة جبارة في علم الجبر . ويرى بعضهم انه اذا كان وضع الجبر هو الخطوة الاولى فاكتشاف فيات هو الخطوة الثانية وفاتحة الجبر المصري .

المنسور ومن يتناول كتاباً قديماً في الجبر يستغلق عليه بادي ذي بد . ولكنه لا يلبث ان ينكشف له ما استبهم من الامر ، فيطالع له بلذة وتأثر . ويشعر ان عاملاً جديداً يقرب بيننا وبين اولئك العلماء الذين وقفوا من الف سنة مثل وقفنا اليوم من عمليات شغلنا في حداثتنا وسوف تشغل احفادنا من بعدنا الى ما شاء الله . وإني لارى بعين الخيال شيخنا الجليل ، يرد الله ثراه ، محمد بن موسى الخوارزمي ، ملتزماً غرفته متربحاً متكئاً على منسورته ، باسطاً قرطاسه مشرعاً قلمه غارقاً في حل معادلاته مأخوذاً بسحرها ، تنقضي الساعات بين يديه وهو لا يشعر بزوالها . وقد اثرت جهوده المتواصلة . فان جبر الخوارزمي ، رغم فقره بالنسبة الى الجبر المصري ، قد بلغ درجة الكمال في بعض نواحيه الجوهرية اعني علمه باهمية الدستور وآلية الحلول . ولا يزال علمنا حتى اليوم مطبوعاً بهذا الطابع البليغ . فالخوارزمي في كتابه يدرك حق الادراك منزلة الدستور الرفيعة وله فيها فكرة واضحة جلية ، والدستور هو النتيجة النهائية لسلسلة من العمليات تُنجز في حل مسائل متشابهة بالترتيب نفسه دون تغيير ، والدستور ايضاً قاعدة قائمة على بضع عمليات قليلة بالنسبة لعمليات الحل كله.

$$س^٢ + ١٠ = ٣٩$$

فلننظر مثلاً في المعادلات $س^٢ + ١٠ = ٤٨$ الواردة في كتاب الخوارزمي^(٢)

$$س^١/٢ + ٠ = ٢٨$$

فانا ، اذا اردنا حلها وحل المعادلات التي من نوعها ، لجأنا الى سلسلة ثابتة من العمليات كأن نقسم العدلين بعدد الاموال الى ما هنالك من العمليات المدونة في الكتب المدرسية . فالدستور يُعطينا عن كل هذه التحويلات ويوصلنا ببضع عمليات الى النتيجة المطلوبة ، وهو

$$س = \frac{-ح \pm \sqrt{ح^٢ - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

ب

(١) رغم وجودها عند الهنود ؛ وكانت الرمزية شائعة بين علماءهم .

(٢) وقد ناقل عنه بعض هذه المعادلات ائمة الرياضيين كشجاع بن اسلم وعمر الحيايمي وابن الحسن الكرخي .

باعتبار المعادلة ب س' ح س + د = ٠ مع العلم ان ح' = $\frac{C}{P}$

والحلّ الصري للمعادلة الآتية :

$$س' + ١٠ = س = ٥٦$$

$$س' + ١٠ = س = ٥٦ - ٠$$

$$س = ٥٦ - ٠ \sqrt{٥٦ + ٠}$$

$$س = ٨١ \sqrt{٥٦ + ٠}$$

$$س = ٩ \sqrt{٥٦ + ٠}$$

$$س = ٤ = س = ١٤$$

ولا يقوم علم الجبر دون دساتير .

ونحن نجد في كتاب الخوارزمي (ص ١٩) في حلّ «مال وعشرة اجذار يعدل ستة وخمسين درهماً»

«نصف الاجذار تكبر خمسة

فاضربها بثلاثها تكون خمسة وعشرين

فزدها على الستة والحسين تكون احداً وثمانين

فخذ جذرها وهو تسعة

فانقص منها نصف الاجذار وهو خمسة فيبقى اربعة

وهو جذر المال الذي اردت. » (ص ٢٠)

وما حلّ الخوارزمي الا دستورنا المصري مُعَبِّدًا عنه بالكلام العادي بوضوح تام كما يظهر من المقابلة بين الحلين . ونلاحظ أن الخوارزمي يجد جذراً واحداً للمعادلة، اذ ان الجذر الثاني سلبى . ويضيف : وكذلك فافضل بجميع ما جاءك من الاموال والجذور وما عادها من العدد تصب ان شاء الله^{١١}.

وهنا لا بدّ من التنويه بآلية العمليات المستعملة في حلّ المعادلات. فهي تتكرر بالترتيب نفسه، لا تتغير اذا تغيرت عوامل المعادلات، فالجبر اذاً اشبه شي. بآلة **آلة الجبر**

(١) في حل المعادلة يعيد عدد الاموال الى واحد قبل ان يطبق الدستور فيقول في $\frac{١}{٢} س' + ٥ = س = ٢٨$ «نكمل مالك حتى يبلغ مالا تاماً وهو ان نضفنه واضف كلما ملك مما يبادل» فيكون مالا وعشرة اجذار يعدل ستة وخمسين درهماً » (ص ١٩).

والجدير بالذكر ان هذه العملية تدعى عند بعض المؤلفين **جبراً**.

جاء في مقدمة ابن خلدون «ويجئون ما فيها من الكسر حتى يصير صحيحاً» (ص ٤٨٤) . وجاء في كتاب لسبط الماردني : «شرح المنفع في علم الجبر والمقابلة» لابن الهائم وهو مخطوط في المكتبة الشرقية في بيروت (ص ٢٢) «نعتبر ما نقص من مال مالا كاملاً وما زاد على مال مالا واحداً» . «ويسمى ذلك بعض الحساب تكميلاً ورداً ويسميه جمهورم جبراً وحطاً» وقد اشار ابن الهائم الى هذا العمل وجمع بين الاصطلاحين في القسمة

فللال كسّر مال يجره وردّ بحطّ زائد أو والمادل اه .

كذلك في $س' + ١٠ = س = ٥٦$ يقول الخوارزمي : «ينبغي ان ترد المالبين الى مال واحد واختيار ١ ثم $\frac{١}{٢}$ عدداً للاموال في المعادلات الثلاثة المذكورة دليل على حسن انتقاء الامثلة اذ يتدرج القارئ بالصعوبة ويعرض لجميع انواعها .

عصرية تغذيها مثلاً بالورق والجبر فتخرج لك كتاباً مطبوعاً ، او تغذيها بالمواد الاولية فتدفع اليك شيئاً كامل الصنع وذلك بمعاودتها العمليات نفسها بالترتيب نفسه .

وقد فهم الخوارزمي اهمية هذه الآلية حق الفهم ، كما فهمها الرياضيون العرب من بعده ، وادركوا الخدمة الانسانية التي يؤدونها للمجتمع من وضعهم في ايدي العامة آلة حسابية طيّعة سهلة المراس لا تخطئ في عملها . فالجبر ، على حسب قولهم ، صناعة تنحصر في بضع قواعد لا يحتاج الصانع فيها الى مواهب عقلية خاصة ، ولا الى اجتهاد الفكر ، ولا الى استنباط الحيلة في كل مسألة تُعَرَضُ عليه شأنه في الهندسة .

وهذا امر يعرفه الدارسون انه لا طريقة شاملة في حل المسائل الهندسية او كما قال اقليدس : ليس ثمة من طريق ملوكي في الهندسة . اما في الجبر فكل المسائل المتشابهة تُحلّ بطريقة واحدة . ويكفي ان يتعلّب احد الرياضيين على معادلة من الدرجة الثالثة حتى يتمكن الناس من بعده من حلّ شبيهاها .

والذي اراه ان الخوارزمي صنع في كتابه بالنسبة للحساب ما صنعه ديكارت بالنسبة للهندسة اي انه اوجد طريقة تضع المنطق بدل الحدس وتُفني عن العبقرية بالاجتهاد . فاستحق ثناء العلم والفلسفة ، وهل من حاجة في عصرنا الى التنويه باهمية الطريقة واثرها ظاهر في عقليتنا العصرية .

الجبر والحساب وكان فضل الجبر انه اوجد طريقة موحدة سهلة لحلّ العمليات الحسابية على ما هو معروف من صعوبتها وتشعب ابوابها . وكلنا يعلم ان الرجل المثقف لا يزال اليوم ، بعد ممارسة الجبر والهندسة وثقافته رياضياً ، يُفضل حل المسائل الحسابية بالجبر ، وقد يعجز عن حلها بالحساب . نوضح هذه القضية ببعض الامثلة .

١ - رجل له من العمر اربعون سنة ولابنه اربع سنوات . فتي يكون عمر الوالد ثلاثة اضعاف عمر ولده ؟

٢ - لدينا من الفضة ثلاثون قطعة منها خمسة ومنها بعشرة . والقِطْعُ كلها بـ ٢٤٥ . فكم لدينا من كل منها ؟

واخيراً من كتاب الخوارزمي : «قسمت درهماً على رجال فاصابهم شيء . ثم زدت فيهم رجلاً ثم قسمت عليهم درهماً فأصابهم اقل من القسم الاول بسدس درهم» (ص ٥١) .

نلاحظ عند حلّ هذه المسائل حسابياً انه لا جامع بين حلول المسائل الثلاث ، ومن يعرف حلّ الواحدة لا يتوصل به الى الثانية والثالثة ويلزمه اجتهاد الفكر وشيء من الاستنباط الامر

الذي لا يتوفر عند عامة الناس .

ندفع الآن هذه القضايا الى الآلة الجبرية فاذا بها تزيل عنا الاختلاف الظاهر وتكشف عن وحدتها الجوهرية فتوحد الحلول في جميعها .

ويصبح لدينا في القضية الاولى : $٤٠ + س = ٣ (س + ٤)$ س : عدد السنين اللازمة
وفي الثانية : $٥ + س + ١٠ = (س - ٣٠)$ $٢٤٥ =$ س : عدد القطع من ٥ دراهم

وفي الثالثة : $\frac{١}{٦} = \frac{١}{س+١} - \frac{١}{س}$ س : عدد الرجال

واذا ما تساءلنا مذهبين كيف وتحد الجبر حلّ عملياتٍ مختلفة كهذه لا يرى الانسان فيها امكانية التوحيد، وجدنا ان الامر قد تمّ بان نزعنا من الاعداد صفتها الشينية من سنين ودرهم واعتبرنا فيها العدد المجرد ، وفيه وحدّه يبحث الجبر . فاصبح العدد بتجريده واحداً ، خاصاً لاحكام واحدة ، وروعي في الاعداد المجردة ، خواصها من تسام وتباين ، مما هو خاضع لاحوال المعادلات وهذا ما فقهه الخوارزمي تمام الفقه .

والعجيب في امر المعادلات ان العقل يفقّد معها كل صلة بالواقع ، وتذوّب اوضاع المسألة في المعادلة . فلا يدرك الصلة بين القضية وبين تحولات المعادلة ، بينما لا يزال الفكر متنبّهاً لتطور المسألة في الحل الحسابي ، فهي في شتى مراحلها تحت سيطرته وعمله . اما في الحل الجبري فالعقل يستسلم الى المعادلة ويكمل اليها العمل كما يصنع العامل بآلة يدير حركتها ، وهو لا يدري كيف تتحول في جوفها المادة ، إلا انه واثق من جودة التحويل ومن دقة الصنع . وبديهي ان العالم الرياضي عارف بطبيعة التحولات الطارئة على المعادلة ، وهو الذي وضعا ورتبها وبنّاها على المنطق واطهر صحتها ، لكن العامة يمكنهم استعمال المعادلة استعمالاً صحيحاً يتودم الى النتيجة دون ان يُدركوا اساس التحولات المنطقي . فالجبر اذا صناعة ، وهكذا شاء الخوارزمي ، وكذلك صناعة هي العمليات الحسابية من كتابة الاعداد وجمعها وضربها وقسمتها ، كما نشرها في كتابه الحساب الهندي .

نحيط العلم وهذه الغاية التي ننسبها الى الرياضيين العرب والى الخوارزمي خاصة ، بتعميم العلم وجعله في متناول العامة^(١) وتسهيله عليهم ، ليست فرضاً مختلّفاً ومحض

(١) معلوم ان هيئة الانسكو تسمى اليوم بنشاط مشكور الى رفع المستوى العلمي والثقافي والادبي في كل الطبقات الاجتماعية ، وهي عني له بوسائل واسعة قوية .

«كارحرية»، ونحن ان نادينا بهذه الواقعة الحقيقية وفاخرة بها ، فاننا نذكر انها لم تحضر على المؤرخين العربيين الذين رعى نظريهم هذا الانحياز في العلم العربي وعطف علماء العرب على المجتمع وعقليتهم التبشيرية ؛ والشواهد على هذه العقيدة كثيرة . جاء في ابن خلكان ان الخليل كان يقول :

«اريد ان اقرب نوعاً من الحساب تخفي به الجارية الى البياع فلا يمكنه ظلمها»^(١). وسواء صحت هذه الرواية ام لا فانها وامثالها تدل على انحاء خلقي وعقلي عند علماء العرب. ولنا في كتاب الجبر والمقابلة شاهد جديد على هذه الرغبة في الافادة ، ففي باب المعاملات وهو قصير جداً، نرى الجبر يطرق ابواب المنازل ويدخل الحوانيت . وليس في هذا الفصل سوى ما نسميه اليوم قاعدة النسبة الثلاثية وتطبيقها على ثلاثة امثلة .

وانا نورد القاعدة مع تطبيقها على مثل واحد لتعريف في الايضاح عن غاية الخوارزمي وطريقته . يقول : «اعلم ان معاملات الناس كلها فن البيع والشراء والصرف والاجارة وغير ذلك على وجهين باربعة اعداد بلفظ بها السائل وهي المِثْر والمِثْر والثمن والمِثْرين ، فالعدد الذي هو المِسر مِباين للعدد الذي هو المِثْر - والعدد الذي هو المِسر مِباين للعدد الذي هو المِثْرين وهذه الاربعة الاعداد ثلاثة منها ابداً ظاهرة مطومة وواحد منها مجهول وهو الذي في قول القائل كم ، وعنه يسأل السائل . والقياس في ذلك ان تنظر الى الثلاثة الاعداد الظاهرة فلا بد ان يكون منها اثنان كل واحد منها مِباين لصاحبه فاضرب العددين الظاهريين المتباينين كل واحد منهما في صاحبه فما بلغ فاقسمه على العدد الآخر الظاهر الذي مِباينه مجهول فما خرج لك فهو العدد المجهول الذي يسأل عنه السائل وهو مِباين للعدد الذي قسمت عليه . ومثال ذلك في وجه منه اذا قيل لك عشرة بسة كم لك باربعة ، فقله عشرة هو العدد المِسر ، وقوله بسة هو المِسر وقوله كم لك هو العدد المجهول المِثْرين وقوله باربعة هو العدد الذي هو المِثْر - فالعدد المِسر الذي هو المِثْر مِباين للعدد الذي هو المِثْرين وهو الاربعة فاضرب المِثْر في الاربعة وهما المتباينان الظاهريان فيكون اربعين فاقسمها على العدد الآخر الظاهر الذي هو المِسر وهو ستة فيكون ستة وثلاثين وهو العدد المجهول

(١) كان الخليل اماماً في علم النجوم وهو الذي استبطن علم العروض واخرجه الى الوجود وكان رجلاً صالحاً عاقلاً حليماً وقوراً . . . اقام في حصن من احقاص البصرة لا يقدر على فلبس واصحابه يكسبون بجملة الاموال . وقد سمع يوماً يقول : « اني لا غنى علي باي ما يجاوزه هي . . . » ولد الخليل سنة ٥١٠٠ هـ ونوفي حول ٥١٧٠ هـ ، فهو اذاً من ماصري الخوارزمي . (عن ابن خلكان : وفیات الايام ١ : ٢١٦)

الذي هو في قول القائل كم وهو المثنى ومباينه الستة الذي هو السمر « (ص ٥٣) .
ويتمشى الكثيرون حتى اليوم في تدريس هذه القاعدة على وضع الاعداد على
الشكل الآتي :

سمر	مستقر	فيجعلون المتباينين في طرفي قطر واحد
٦	ب	ويستخرجون المجهول حسب قياس الخوارزمي
		بضرب المتباينين الظاهرين وقسم جدائهما على
٤	ب	الظاهر الثالث . وقاعدة الخوارزمي تعود ضمناً
ثمن	مثنى	الى حل المعادلة $\frac{4}{6} = \frac{4}{6}$
		س ١٠ . وفي حل

الخوارزمي لا حاجة للمنطق والتفكير . فالقاعدة آليّة لا يُخطئُ الغلام والجارية في استخدامها .
فنحن نرى من هذا المثل البسيط الى اي حدّ من الآليّة وصل الجبر في فكر الخوارزمي
وفي اخراجه . ولا يعطي الخوارزمي برهاناً على صحة القاعدة . وهكذا في الكثير من القواعد
الآخري . وفي ذلك دليل على ان الكتاب في نظره كتابُ تدريسٍ مختصر . ولو ان معاصراً
للخوارزمي اطّلع على وثائقه الشخصية فلا شك اذاً انه كان يعثر على البراهين الدامغة .

واذا لام احدثهم شيخنا الجليل على تذليله العلم الى حدّ جعله آلةً تغني عن التفكير
وتُصلح في ايدي الجارية والاجر ، كما نَقَمَ الصاحب بن عباد على واضع «الالفاظ الكتابية» ،
اجنباه ان رجالاً مثقفين اذا سئلوا عن ثمن اربعة امتار وربع مع علمهم بسرّ مرقن ونصف
فانا لا نُبالغ اذا قلنا لانهم ما دائماً يُصيون ، واجنباه ان موارد التفكير لم تنضب بعد
على محبي التفكير .

واذا شئت الآن ان تعلم ما كان يُجنيه علماء العرب من عطفهم على الفقير والمسكين
فما لك الا ان تناجي روح الضحّاك بن مزاحم وعبدِ الله بن الحارث اللذين كانا يُعلّمان
ولا يأخذان اجراً ؛ او تعود بالذكري الى من كان يُعلّم منهم ويأخذ خبزاً ؛ والى الفارابي
العائش في بلاط سيف الدولة لا يقبلُ من المال الا اربعة دراهم في اليوم . هكذا كان
الكثيرون من علماء العرب ، وهكذا فاني اتمثل الخوارزمي .

تحليل الكتاب

اما وقد حققنا في صفات الكتاب العلمية والادبية ، وبيننا ان علم الجبر قد بلغ فيه نضجه ، وحاز على طريقه الخاصة فاصبح في الحقيقة علماً مستقلاً عن الحساب ، فقد آن لنا ان نتبسط في العرض لايواب الكتاب ، فتكون لنا صورة صادقة واضحة عنه .

يبدأ الخوارزمي بتعريف المصطلحات : جذر ، مال ، عدد مفرد ، التي يُحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة ويقوم مقامها في الاصطلاح الحديث الشيء ومربعه والعدد المعلوم ، ثم يباشر حل معادلات الدرجة الاولى والثانية عارضاً لجميع حالاتها دون استثناء وهي برموزنا العصرية.

$$\begin{array}{lcl} \text{ب س} = \text{ح} & \text{ب س} = \text{ح س} & \text{ب س} = \text{د} \\ \text{ب س} + \text{ح} = \text{د} & \text{ب س} + \text{د} = \text{ح س} & \text{ب س} = \text{ح س} + \text{د} \end{array}$$

معادلات
الدرجة الثانية

والمعلومات ب ح د كلها موجبة. ولو علم الخوارزمي بالاعداد السلبية لكفت المعادلة
 $\text{ا س} + \text{ب س} + \text{ح} = \text{د}$

واما المعادلات التي يحلها مثلاً على الحالة الثانية فهي :

$$\begin{array}{l} \text{س} = \text{س} \\ \text{س} = \frac{1}{2} \text{س} \\ \text{س} = 10 \text{س} \end{array}$$

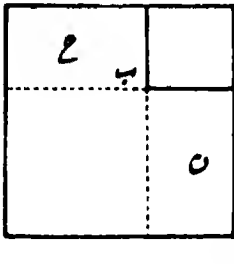
ونلاحظ ان عدد الاموال في الامثلة الثلاثة هو ١ وهو الايسر ، ثم ١/٢ وهو كسر اصغر من ١ ، واخيراً ١٠ وهو عدد اكبر من ١ ، وهو يردّ عدد الاموال الى مال واحد في حل المعادلات. وهذا التدرج والتنويع في الصعوبة الذي نبهنا اليه سابقاً دليل آخر على خبرة الاستاذ وحذقه ووضوح تعليمه ، وهو كذلك في جميع امثاله .

وقد سبق لنا ان اعطينا مثلاً على حله معادلة ذات ثلاثة حدود فنكتفي بهذا المثال . والجدير بالذكر ان المعادلة $\text{س} + \text{د} = \text{ح س}$ او $\text{س} - \text{ح س} + \text{د} = \text{د}$ لها جذران في حال $\text{ح} - \text{د} < 0$. ولها جذران متساويان في حال $\text{ح} - \text{د} = 0$. وهما $\text{س} = \text{س} = \text{ح} - \text{د}$ ولا جذر لها في حال $\text{ح} - \text{د} > 0$.

وألخوارزمي عالم بهذا كله فهو يقول : « واعلم انك اذا نصفت الاجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فكان مبلغ ذلك اقل من الدراهم التي مع المال فالمسألة مستحيلة . وان كان مثل الدراهم بعينها فجذر المال مثل نصف الاجذار سواء . لا زيادة ولا نقصان » (ص ٢١) .
وبلي قواعد حل المعادلات الثلاثية برهانها الهندسي أو علتها كما يقول ولا برهان على الثلاثة الاولى لسهولة تحصيله على الأرجح . ونحن نورد هنا برهانه الثاني على حل

$$س^٢ + ١٠ = ٣٩$$

يقول : وله أيضاً صورة اخرى تؤدي الى هذا وهي سطح ا ب وهو المال فاردنا ان تزيد عليه مثل عشرة أجزاره فنصفنا العشرة فصارت خمسة فصيرناها سطعين على جنبي سطح ا ب وهما سطحا ح ن . فصار طول كل سطح منهما خمسة أذرع وهو نصف العشرة الاجذار وعرضه مثل ضلع سطح ا ب ، فبقيت لنا مربعة من زوايا ا ب وهي خمسة في خمسة وهي نصف العشرة الاجذار التي زدناها على جنبي السطح الاول . فملنا ان السطح الاول هو المال وان السطحين اللذين على جنبيه هما عشرة أجزار فذلك كله تسعة وثلاثون . وبقي الى تمام السطح الاعظم مربعة خمسة في خمسة فذلك خمسة وعشرون ا س هـ
فزدناها على تسعة وثلاثين ليم لنا السطح الاعظم الذي هو سطح س د هـ
فبلغ ذلك كله اربعة وستين فأخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو هـ خمسة بقي ثلاثة وهو ضلع سطح ا ب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته (ص ٢٣) .



العمليات الجبرية . ولما كانت المعادلات التي تُعبرُ عن القضايا الحسابية لا تأتي بهذا الشكل النهائي الوارد في الابواب الستة ، وهي تحتاج الى شق التحويلات من جمع وطرح وضرب وقسمة ، كان لا بد ان يورد ألخوارزمي قواعد العمليات المذكورة . وهذا ما فعله في فصل مختص بالمبارات الثنائية ف ضرب ١٠ + س في نفسه و ١٠ - س في نفسه و ١٠ + س في ١٠ - س وكل ذلك بوضوح كلي . وضرب عبارة ثنائية في عبارة ثنائية ، وضربها في عدد مفرد . وهذه العمليات موجودة كلها في الصفحات الاولى من كتبنا المدرسية ، ويعلم الله كم نقضي من الاوقات في تدريسها للبتدئين . أفلا نشعرُ بشيء من السرور والدهشة اذ نجدُها كما هي في جبر ألخوارزمي الموضوع في اوائل القرن التاسع ٩١٠ .
نورد من هذا الفصل مثالا واحداً فيه عبارة : « وان قال عشرة الاشياء في عشرة الاشياء

قلت عشرة في عشرة بمائة ، وآلا شيئاً في عشرة عشرة أشياء ناقصة ، وآلا شيئاً في عشرة عشرة أشياء ناقصة وآلا شيئاً في الآ شيئاً مال زائد فيكون ذلك مائة ومالاً الا عشرين شيئاً » (ص ٢٨) .

وان هذا المقطع جدير بكل انتباهنا : فان العرب لم ينظروا في الاعداد السلبية ، ولو فعل الخوارزمي سنة ٨٣٠ لتقدم الجبر بضعة قرون . وهو لا يجد في حل المعادلة

$$س^2 + ١٠ = ٣٩$$

وما شابهها الا حلاً واحداً موجباً غير منته للحل السليبي كما قلنا .

إلا أننا نراه يقول الآ شيئاً في الآ شيئاً دامجاً الآ بالعدد جاعلاً منه عدداً جديداً اي عدداً سلبياً ، ويا ليتة فعل . ويصُـبُّ لفة شرح هذا التعبير ، كما إن عالماً رياضياً لا علم له مطلقاً بالاعداد السلبية لا يخطر بباله في حال من الاحوال ان يقول : الآ شيئاً في عشرة عشرة أشياء ناقصة وهذا لمعري لا يرتكر الى منطق .

وبما يثير الدهشة والريبة حقاً هو ان الهنود كان لهم علم واسع بالاعداد السلبية فإنا نجد في كتاب بْرَهْمَجَبْطَ ، المولود سنة ٥٩٨ للمسيح ، « مجموع ثروتين هو ثروة » ، ومجموع دينين هو دين ، ومجموع ثروة ودين هو الفرق بينهما واذا تعادلا فصفر ، مجموع صفر ودين هو دين ، مجموع ثروة وصفر هو ثروة ، مجموع صفرين هو صفر .

وهو يعني بالثروة العدد الموجب وبالدين العدد السليبي ، ولا اوضح من هذا التعبير ولا أظرف منه ، ونحن لا تزال حتى اليوم نشرح العددين السليبي والموجب بواسطة الثروة والدين . ونجد عند الرياضي الهندي آرَبِهَيْطَ ، المولود سنة ٤٧٦ للمسيح ، تأويلاً للحلول السلبية لبعض القضايا وليس هذا بالامر اليسير . وقد جهل العرب هذه الاكتشافات لان الهند بقيت على هامش العالم المتحضر ، رغم حضارتها الزاهرة ، فاضطُرَّ الى اكتشافها مجدداً فوضع العالم الايطالي باشيولي الاعداد السلبية سنة ١٤٧٠ ، وبحث في تأويل الحلول السلبية مجدداً ديكرارت في القرن السابع عشر . وتعبير الخوارزمي اذ يقول الآ شيئاً في الآ شيئاً قد أثار دهشة المستشرق روده ^(١) ، ودفعه الى التساؤل هل اتصل الخوارزمي بطلما الهند ، وهو صاحب الحساب الهندي ، ومؤرخو العرب يُردّدون انه سافر الى الهند قبل انقطاعه الى مكتبة المأمون ، والواضح الجلي على كل حال أن الخوارزمي لم يُعرِ الاعداد السلبية ايما اهتمام ولا اشارة اليها في كتابه ، ولا في كتب رياضيي العرب من بعده .

والخوارزمي اذ يعمل بالبرهان الهندسي جمع $\sqrt{200} - 10$ مع $20 - \sqrt{200}$ وهو اثر للطرق اليونانية الا انه لا يذكر تعليلاً لقواعد الضرب مع حاجتنا الى برهان قائم . والحق يقال ان اقامة البرهان الهندسي على (١٠ - س) (١٠ - س) وما شابهها ليس بالامر السير ولا شك ان الخوارزمي عارف به تمام المعرفة .

الجزور ثم يلي ذلك فصل في الجذور وفيه نجد بوضوح كلي كأنها منقولة عن كتاب مدرسي حديث : « إن أردت أن تضرب جذر تسعة في جذر أربعة فاضرب تسعة في أربعة فيكون ستة وثلاثين فخذ بجذرها وهو ستة . وكذلك لو أردت ان تضرب جذر ٥ في جذر ١٠ فاضرب ٥ في ١٠ فجذر ما بلغ هو الشيء الذي تريده » (ص ٣٢) . « واذا أردت أن تقسم جذر ٩ على جذر ٤ فانك تقسم ٩ على ٤ فيكون $2\frac{1}{4}$ فجذرها هو ما يصيب الواحد وهو واحد ونصف » (ص ٣١) . وفي عملياته عن الجذور ذكر لكلمة اصم ومقابلها الحديث بالفرنسية (irrationnel) ، وقد ترجمت الى اللغات الاوربية قديماً كما هي فتجدها مثلاً في مؤلفات ديكارت (nombre sourd) . ويتسنى للخوارزمي الآن ان يعالج ما أسماه المسائل الست التي تؤول الى المعادلات المحلولة في بده كتابه . وها نحن نورد باختصار مثلاً واحداً لنقف على تحويلات المعادلة بين يديه :

الجبر والمقابلة « عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم في نفسه وجمعتها فكانا ثمانية وخمسين درهماً قياسه أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة الا شيئاً » (ص ٣٧) . وينتهي بذلك الى

$$س^2 + (١٠ - س) = ٥٨ .$$

$$س^2 - ٢٠ + ١٠٠ = ٥٨ .$$

فيقول : « فاجبر المئة والمالين بالعشرين الشيء الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون : $س^2 + ١٠٠ + ٥٨ = ٢٠ + س$.

$$\text{فاردد ذلك الى مال واحد : } س^2 + ٢٩ = ٥٠ + س .$$

فقابل به وذلك انك تلقي من الخمسين تسعة وعشرين $س^2 + ٢١ = ١٠ + س$. وقد أردنا بهذا المثل ان نبين المعنى الاصيل لكلمتي الجبر والمقابلة^(١) اللتين أعطتا اسمهما لهذا الفرع من الرياضيات . فالجبر اذاً ازالة الطرح من المعادلة^(٢) والمقابلة بين الكميات

(١) ظل علم الجبر في اوربة يسمى بـ «الجبر والمقابلة» حتى القرن السادس عشر وفيه ثلاث كلمات مقابلة .

(٢) ذكرنا في محل سابق معنى آخر للجبر .

المتشابهة في طرفي المعادلة ، بان تلقي الكمية من شبيهتها فلا يبقى منها الا واحدة في احد الطرفين . وهاتن العمليتان مع عملية الرد اساسيتان في حل المعادلات .

يلي هذا الباب الذي يسميه باب المسائل الست باب المسائل المختلفة وهو طويل مشبع . ومن اظرف مسائله المعادلات الكسرية نذكر منها :

$$\frac{1}{4} = \frac{س}{س+2} \quad (ص ٤٤)$$

$$\frac{1}{6} = \frac{س-١٠}{س} + \frac{س}{س-١٠} \quad (ص ٤٠)$$

ثم يلي باب المعاملات وقد مر ذكره .

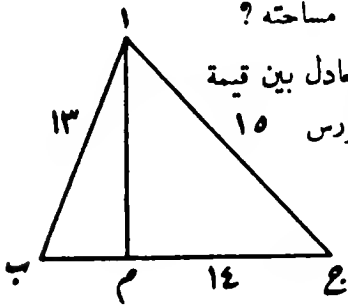
ثم ان الحداد والتجار والزارع والدهان وغيرهم من الصناع في حاجة الى المعلومات الهندسية الاولى كساحة المربع والمثلث والدائرة . ولهذا فان الباب التالي يدور على الاحجام والمساحات . ويلطف ما قاله في الدائرة : « وكل مدورة فان ضربك القطر في ثلاثة وسبع هو الدور الذي يحيط بها وهو اصطلاح بين الناس من غير اضطرار . ولا تهل الهندسة فيه قولان آخران : احدهما ان تضرب القطر في مثله ثم في عشرة ثم في عشرة ثم تأخذ جذد ما اجتمع فما كان هو الدور . والقول الثاني لاهل النجوم منهم ، وهو ان تضرب القطر في اثنين وستين ألفاً وثمانئة واثنين وثلاثين . ثم تقسم ذلك على عشرين ألفاً فما خرج فهو الدور . وكل ذلك قريب بعضه من بعض . » (ص ٥٥) ومعلوم ان العدد الاخير ٦٢٨٣٢ يساوي ١٤١٦ ٣٦ ٢٠٠٠٠

المستعمل اليوم والفرق بينه وبين القيمة الحقيقية اقل من جزء من مئة الف . وجميع هذه الاعداد كان معروفاً عند الاقدمين . فالعدد ٢٢ ذكره هيرون الاسكندري ، و١٤١٦ ٣٦ مذكور في كتب بطليموس وآرنيهط .

٧

فليس الجبر وما يلفت الانظار في هذا الفصل ويسترعي الاهتمام والاعجاب هو وجود عمليتين هندسيتين محلوتين بواسطة الجبر ، مما يدل على ان الخوارزمي كان عالماً على الهندسة . بإمكانيات الجبر الواسعة متصرفاً فيه بحذق ورشاقة . يقول المستشرق فوبكه ان العرب اول من استعان بالجبر على الهندسة . فاذا كان الامر كذلك فالخوارزمي اول عالم في التاريخ فطن الى هذا التطبيق .

وها نحن نورد المسألتين مع حلها موجزاً (ص ٦٢ - ٦٥) .



المألة الأولى مثلث اضلاعه تساوي ١٣، ١٤، ١٥ فكم مساحته ؟

يسمى بـ م الشيء : س فيكون ج م = ١٤ - س ؛ ويعادل بين قيمة
المود في كل من المثلثين الصغيرين مستعيناً بقضية فيثاغورس ١٥

$$١٥^2 = (١٤ - س)^2 + ١٣^2$$

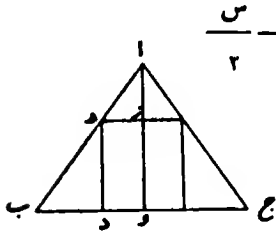
فيحصل س = ٥

$$١٢ = م \quad ١٥ - ١٣ = ٢$$

$$\text{والمساحة} = \frac{١٤ \times ١٢}{٢} = ٨٤$$

المألة الثانية مثلث طول اضلاعه ١٠، ١٠، ١٢ احسب ضلع المربع المرسوم فيه .
ضلع المربع = س عمود المثلث يعدل ٨ عملاً بقضية فيثاغورس .

يساوي مساحة المثلث مجموع مساحات المربع والمثلثات الثلاثة القائمة على جوانب المربع.



$$\text{ضلع المربع} = س \quad \text{وب} = ٦ \quad \text{ود} = \frac{س}{٢} \quad \text{دب} = \frac{س}{٢} - ٦$$

$$٨ = س - ٦$$

فتكون المعادلة

$$\left(\frac{س}{٢} - ٦ \right) \cdot \frac{س}{٢} + \frac{(س - ٨) \cdot س}{٢} + \frac{س^2}{٢} = \frac{١٢ \times ٨}{٢}$$

$$\text{وجذرهما} \quad س = \frac{٤}{١}$$

وهكذا فان الفكرة الجبرية الاساسية موجودة عند الخوارزمي وهي ربط المجهول

بالطومات بواسطة المعادلات . ونذكر بهذه المناسبة ان رينه ديكارت اذ يحل بعض المسائل

الهندسية بالجبر فانه لا يخفي اعتنازه وسروره .

الجبر والوصايا ويختتم الخوارزمي مؤلفه بفصل متناهي الطول اسماء كتاباً لا باباً. وهو يكاد يحتل من كتاب الجبر والمقابلة نصفه الثاني. وفيه بحث في الوصايا على ابوابها من عين ودين، وتكملة وترويض في المرض، وعتق في المرض، وعقر في الدؤر وسلم في المرض. وكثير من المسائل محلول بواسطة الجبر. وهذا ما يبرر وجودها في كتاب الخوارزمي. وغني عن البيان صعوبة القضايا المتعلقة بالمواريث والوصايا. فلا عجب اذا تحالف القاضي والرياضي في معالجتها. والمسائل في كتاب الخوارزمي محلولة بحسب الشرع الاسلامي ولنذكر بعضها :

١ - رجل مات وترك ابنين . واوصى بثلث ماله لرجل اجنبي، وترك عشرة دراهم عيناً، وعشرة دراهم ديناً على احد الابنين . ص ٦٢ .

٢ - رجل مات وترك امه وامراته واخاه واخيه لايه وامه. واوصى لرجل بثسع ماله. ص ٦٨ .

٣ - رجل تزوج امرأة في مرض موته، على مائة درهم، ولا مال له غيرها، ومهر مثلها عشرة دراهم . ثم ماتت المرأة واوصت بثلث مالها . ثم مات الزوج . ص ٩٢ .

٤ - رجل اعتق عبداً له في مرضه قيمته ثلثمائة درهم . ثم مات العبد وترك بنتاً وترك ثلثمائة درهم، ثم ماتت البنت وترك زوجاً وترك ثلثمائة درهم . ثم مات السيد . ص ٩٩ . وفي هذه الامثلة الكفاية .

وهكذا فانه يتضح ان علم الجبر في نشأته كان للعرب المعين اليومي في معاملاتهم ومواريثهم ووصاياهم . فهو اذاً، رغم قيمته النظرية وطبيعته المجردة، لم يترفع عن الحاجات المادية . فلا عجب اذا تفرع بينهم غزيراً على طبقة واسعة منهم، بالآل مجهودهم رقيقاً يشهد له التاريخ .

ثم إن المساعدة التي اداها الجبر للدين الاسلامي في حل القضايا الوراثية كان لا بد ان يردّها الدين عليه، فيزيد في تقدير الامة له وتعلقها به. وبالفعل فقد اصبح علم الفرائض " علماً يتعاون فيه الرياضي والفقهاء، وقد كثرت فيه التأليف المتنوعة .

(١) في المكاتب الاوروية مخطوطات عديدة في علم الفرائض نذكر منها تأليف بدر الدين سبط الماردني وشهاب الدين ابن الهام في باريس .

قال ابن خلدون في مقدمته : « وللناس فيه تآليف كثيرة أشهر ما عند المالكية من متأخري الاندلس كتابُ ابنِ ثابتٍ ومختصرُ القاضي أبي القاسم الحوفي ثم الجعدي ...
 وأما الشافعية والحنفية والحنابلة فلمهم فيه تآليفٌ كثيرةٌ وأعمالٌ عظيمةٌ صعبةٌ شاهدةٌ
 لهم باتساعِ الباع في الفقه والحساب ... ومن المصنفين من يحتاج فيها إلى القلوب في الحساب
 وفرض المسائل التي تحتاج إلى استخراج المجهولات من فنون الحساب كالجبر والمقابلة والتصرف
 في الجذور »^{١)} .

آراء المؤرخين في الكتاب

بعد هذا العرض المفصل لآبواب الكتاب اصبح في استطاعتنا ان نقرّم بعض الاحكام الواردة في حق كتابنا العزيز :

جاء في دائرة المعارف الايطالية العامة - التي نبث مؤلفيها شكرنا واعجابنا لاجلهم القيمة في الحضارة العربية - في تعريف كتاب الخوارزمي (لفظة جبر مقطوعاً) أنه - في جزئه الاكبر - مجموعة مسائل متعلقة بالوراثة والوصايا والصيرفة والتجارة مع انه ليس في الكتاب ثمة مسألة واحدة عن الصرف ، اما المسائل التجارية - وقد ذكرنا منها واحدة - فثلاث ، تقع في صفحة ونصف لا غير . ومثل هذا الاعتقاد في مضمون الكتاب شائع بين مؤرخي الغرب ، وقد يكون عذرهم ما جاء في مقدمته .

ونجد كذلك في دائرة المعارف الاسلامية (الترجمة العربية لفظه الخوارزمي) .

« وليس هذا الكتاب في الجبر كما نفهمه ، وانما هو مقدمة في الحساب العملي القائم على عدة مسائل محلولة ، ومادة الكتاب في الوقت نفسه جد متباينة فهو يحوي :

أ - عمليات في التفاضل والتكامل في ابسط صورها (وليتهم عادوا في الترجمة الى الاصل العربي فقالوا الجبر والمقابلة) .

ب - المساحة والاختاء فيها ^(١) .

ج - قواعد في تقسيم الموارث في الوصية » .

ومن يطالع الكتاب لا يجد فيه مسألة واحدة تبحث في اخطاء القياسات وكيف يتوصل الجبر الى مناقشة الاخطاء . وهو في اول نشأته ؟ وأما ان يكون الكتاب مجموعة لمسائل جد متباينة وانه ليس بالجبر كما نفهمه فمسألة تحتاج الى ايضاح . لا شك ان التباين واقع حتماً بين الاعمال المساحية والتقسيم الوراثةية ولكننا نرى وحدة حقيقية في الكتاب ورابطة بين اجزائه . وعندنا ان جوهر الكتاب هو حل المعادلات النظرية كما في كتبنا

(١) في الاصل الفرنسي القياسات والاختاء فيها .

الابتدائية وما سوى ذلك فتطبيق لها في الحقول المختلفة. ومن البديهي ان يسمى الخوارزمي الى تشويق الدارس وافادته بان يبين له ما يجنيه عملياً من هذا العلم النظري . ولا ننكر من ثم ان المواريث تحتل محلاً مفرط الطول في كتاب الجبر والمقابلة . ولا ندري ابدلت نية الخوارزمي الاولى عند ما انتهى الى فصل المواريث ورأى ان يحله شبه مؤلف مستقل حتى انه اسماه كتاباً بينا هو يسمي الفصول الاخرى ابواباً .

ثم انه يؤسفنا ان مؤرخي العرب العصريين لم يعيروا تدريجهم العلمي الانتباه الواجب والتقدير اللائق به . وقع بين يدينا كتاب في تاريخ العرب كثير الرواج في اسواق بيروت ففتحناه في صفحة الخوارزمي ، واخذنا نقرأ فكنا كلما تقدمنا سطرًا زاد في حيرتنا وذهولنا. والى القارئ بعض ما ورد في هذه الصفحة :

«الخوارزمي ٧٨٠-٨٥٠ هذا ابرز شخصية في تاريخ الرياضيات القديم عند العرب واحد كبار المفكرين المسلمين . وقد اثر في الفكر الرياضي تأثيراً لم يكن لسواه في العصور الوسطى . . . وضع . . . اقدم كتاب في الجبر وهو حساب الجبر والمقابلة . اورد فيه ما يزيد عن ثمانية من الامثلة وهو اعظم كتبه ولكن الاصل العربي مفقود» .

من المعلوم ان الدقة في التمييز والتنقيب ميزة اساسية في المؤرخ فلا يجزم في امر تتناوله الشكوك، وعليه عند التحصيل الشخصي ان يثبت بالنصوص والبراهين صحة ما «صله» .
١ - فمن اين عرف المؤلف سنة ميلاد الخوارزمي وليس لها ذكر في بحث واحد من اجاث المستشرقين ولا في كتب الاقدمين. واما اذا كان الامر تحصيلاً شخصياً فلام يستند؟ او تقديرًا فما هي الاعتبارات المرجحة لهذا التقدير ؟

٢ - جعل موت الخوارزمي سنة ٨٥٠ مع ان الاراء متضاربة حوله ، فالمستشرق سوتر يقدر ان الخوارزمي توفي بين ٨٣٥ و ٨٤٤ ونلینو يجعل موته بعد بحث دقيق في سنة ٨٤٦ - ٨٤٧ ، وقد اعتمدت الموسوعة الايطالية المطبوعة ١٩٣١ سنة ٨٤٦-٨٤٧ .

٣ - اما قوله ان الخوارزمي ابرز شخصية في تاريخ الرياضيات القديم عند العرب فمسألة فيها نظر ، وما رأيه اذاً في البتاني والبيروني والحيامي .

٤ - وقوله انه اول من وضع كتاباً في الجبر خطأ واضح .

٥ - وقوله ان الكتاب يحوي اكثر من ثمانية مثل فقريب ، اذ لو حوى حقاً هذا المدد الكبير لاصبح هذا الكتاب المختصر مجلدًا ضخماً . ومن اي مصدر قديم ثقة تناول هذا التعريف عن كتاب يقول انه ضائع ، مع انه مطبوع ، والمفقود كتاب الحساب الهندي ، وقد نشر في ايطاليا كتاب قديم لاتيني يرجح انه ترجمته .

مصادر الخوارزمي

نبحث الآن باختصار في مصادر الخوارزمي . لقد ظنوا ردهة طويلة من الزمن ان الخوارزمي مبدع علم الجبر — قال ابن خلدون في مقدمته الشهيرة : «اول من كتب في هذا الفن ابو عبدالله الخوارزمي» . وقد ردد الكثيرون مثل هذا القول حاملينه على غير معناه من ان الخوارزمي هو واضع علم الجبر . ولنا على هامش النسخة الخطية من كتاب الخوارزمي حاشية ذات مغزى : « هذا أول كتاب وضع في الجبر والمقابلة في الاسلام ، ولهذا ذكر فيه من كل فن طرفاً لتفيد الاصول في الجبر والمقابلة » . فليس الخوارزمي مبدع هذا العلم بل هو اول من ألف فيه باللغة العربية . والعرب الذين ترجموا كتاب ديوفنطس في القرن العاشر او قبل ذلك التاريخ عارفون تمام المعرفة بوجود كتاب يوناني في الجبر . ولا يُعقل ان يصدر عن الخوارزمي او عن اي عبثي آخر علم كامل الاصول والطرق دون ان يكون له اساس سابق في محاولات متفرقة . فالتاريخ يشهد على خطوات الهندسة الاولى وهي اشبه شي بخطوات الطفل الكثيرة الضعف والثرثرة ، وقد امتدت على اجيال . وكذلك قل عن العلوم الاخرى ولا حاجة الى التذكير بنشأة تكافؤ الحرارة والعمل الذي عانى في معالجته علماء فرنسيون وانكليز والمان شي الكثير قبل ان يستخرجوا حقيقته . وما اكثر القضايا التي تتغير اسماء مكتشفها بحسب البلدان . فهناك قضية ضغط الغازات فانها تنسب الى ماريوت في فرنسا والى بويل في انكلترا . ومعادلة شال تنسب الى مويوس في المانيا . وعلم المشتقات يتنازع على اكتشافه لينت ونيوتن . والقنبلة الذرية في ايامنا فما اكثر العلماء الذين ساهموا نظرياً وعملياً في تحقيقها .

وعلى كل حال فالجبر قديم المهد نجد منه ألفه وباءه في بردي احميس الذي يرجع الى سنة ١٧٩٠ قبل المسيح . وفي النصف الثاني من القرن الثالث بعد المسيح نبغ في الاسكندرية

(١) وهو اشهر باسم محمد بن موسى . وابو عبدالله محمد بن احمد بن يوسف الخوارزمي صاحب مفاتيح العلوم ، عالم عاشر في النصف الثاني من القرن العاشر .

عالمٌ يُعد حقاً أبَ الجبر لتوسعه فيه وإدخاله عليه التحسيناتِ الخطيرة وهو ديوفنتس - والمظنون ان تعاليم ديوفنتس تناقلها الدارسون جيلاً بعد جيل في المدارس اليونانية والسريانية المزدهرة في الشرق ، ولكن بشي من الإهمال . وبلغت تعاليم ديوفنتس بلادَ الهند كما بلغتْها الهندسة الاغريقية فوجدت فيها ارضاً خصبة انبتت عالِمين نابغين هما آرِيْبْهَط وبراهما غِطَا . والاعتقادُ السائد ان الخوارزمي أخذَ عن مدارس عصره بعض معلوماته في الجبر والمقابلة لكنه فهم تماماً أهمية هذا العلم ، وجمع شتاته ، ورتب مسائله على حسب المنطق ، وطبعه بعبقريته ، فبعثه فكرةً متينة الاساس ، واسعة الامكانيات ، قابلة التطور ، واضع طُرقه فتفهمه من بعده الكثيرون تفهماً صحيحاً ، فما عاد يُخشى على الجبر ان يتلاشى ثانية ويُهمل كما حدث من بعد ديوفنتس .

ويصعبُ معرفة ما هوَ من وَضَعِ الحَاصِرَ لِهَذهِنا حالةَ العالمِ بالتفصيلِ في الحِقْبَةِ السابِقَةِ للخوارزمي . فهل يكشف الزمان لنا عنها او تبعث من بطون الارض الطوامير والمخطوطات الخفية فتشبعُ رغبَتنا ؟ يبقى في متناولنا ان نعودَ الى الخوارزمي نفسه ونسأله عن نصيبه الشخصي من علم الجبر . يقولُ : « ولم تزل العلماء في الازمنة الخالية والامم الماضية ، يكتبون الكتبَ بما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظراً لمن بعدهم واحتساباً للاجر بقدر الطاقة ، ورجاء ان يلحقهم من اجر ذلك وذخره وذكره ، ويبقى لهم من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثيرٌ مما كانوا يتكلفونه من الموزنة والمجملونه على انفسهم من المشقة في كشف اسرار العلم وغامضه . إما رجلٌ سبقَ الى ما لم يكن مستخرجاً قبله فورثه من بعده . وإما رجلٌ شرح بما ابقى الاولون ما كان مستغلاً فواضح طريقه وقرب مأخذه . وإما رجلٌ وجد في بعض الكتب خللاً فلم يشعه واقام اوده واحسن الظن بصاحبه غير رادّ عليه ولا مقتخر بذلك من فعل نفسه . وقد شجني ما فضل الله به الامامُ المؤمن امير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له إرثها واكرمه بلباسها وحلّاء بزينتها ، من الرغبة في الادب وتقريب اهله وادنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته اياهم ، على ايضاح ما كان مستهيماً وتسهيل ما كان مستوعراً . على ان ألفتُ من حساب الجبر والمقابلة كتاباً مختصراً حاصراً للطف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقامتهم واحكامهم وتجاريتهم ، وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكري الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوه وفنونه » . ص ١٥ - ١٦

ونحن نرى بوضوح انه بعد ان قسم العلماء الى ثلاثة اقسام اولها المكتشفون وثانيها

المكملون وثالثها المنقعون فانه وضع نفسه في مصاف المكملين الموضحين ، فاذا اخذنا بهذا القول جاز لنا ان الخوارزمي اوجد حلولاً لمسائل كانت مستغلقة على من سبقه و اضاف شيئاً جديداً الى معلومات اهل زمانه . ويستبعد ان يغالط الحقيقة ويدعي لنفسه ما هو لغيره . ومعاصروه عارفون بحال العلم وقادرون على مناقشته وتكذيبه وتقريبه . ولا يُستخلصُ مطلقاً من سياق كلامه ان الجبر كان نكرة عند العرب وان الخوارزمي اول من عبر عنه باللغة العربية ، فاننا نظن انه لو كان الخوارزمي واضع المصطلحات الجبرية : جبر ، مقابلة ، مال ، جذر ... لظهر شيء من ذلك في كلامه ولاحتاج الى تنبيه قرائه ، بينما نراه يقول : « وجدت الاعداد التي يُحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور واموال وعدد مفرد دون ان يُظهر اي تردد في استعمالها ، ودون ان يعطل لغوياً انتقاء هذه الالفاظ فكأنها متداولة من زمن بعيد .

شخصية الخوارزمي

وتظهر لنا اخلاقه الحسنة من خلال مقدمته فانه يُقيم وزناً واعتباراً لمن يُجسِّنُ الظن بغيره من المؤلفين ويُصلحُ الحلال دون ان يقتخر بنفسه ، فناية العالم هي ادراك الحقيقة ، فاذا ما بلغها قد بلغ امنيته وما للعالم ان يبحث عن المعرفة طلباً للشهرة ولنافسة غيره وتحميده . ونشعر ان الخوارزمي وان لم يُصرح بمعتقده الشخصي الا انه يدن بهذه المبادئ الاخلاقية العالية ، وما نعلم عن انقطاعه الى دار الحكمة في الشطر الاخير من حياته بحيث لم تقم حوله احاديث او دعايات ، يُتَوَرَّى فيها هذا الاعتقاد ، وهو لا يطلب للعلماء اجوراً على ما يتحملونه من المشاق ، ويعد امرأ طبيعياً لا نقاش فيه ، ان العالم يكفيه الاجرُ ولسانُ الصدق .

ايا القاري الكريم ، وقفة في ختام هذا البحث امام هذا الوجه الجليل . عالم في بلاط العباسيين يفضل الغزلة على الشهرة ، والجد على اللهو ، والعلم على المال . يصل آناء الليل باطراف النهار في تسهيل العلم وتقريبه وضبطه وتوسيعه . وبينما ترحف الجيوش المظفرة شرقاً وغرباً لتكتسب الشعوب والبلدان الى مئة سنة او بضع مئات يسعى هو الى الالاف . فلا تظلم الشمس من بعده على قطر من الاقطار ، الا والبائع في حانوته ، والسيدة في منزلها ، والعالم في مرصده ، يحسبون بحسابه الهندي والاف الالاف من القتيان يحفظون في جبره ومقابلته . اياهم سخية بيضا . جعلها وفقاً لقومه على الاجيال وحسب الدعاء والذكر الحسن . الاربعة الله محمد بن موسى رحمة واسعة ، واحسن على امته ببعض علمه وفضله ا

مختصر المراجع

- كتاب الجبر والمقابلة طبعة روزن (Rosen) لندن ، ١٨٢١ .
كتاب الجبر والمقابلة طبعة علي مشرفة ومحمد احمد ، مصر ، ١٩٣٩ .
مقدمة ابن خلدون ، المكتبة التجارية الكبرى مصر .
الفهرست لابن النديم .
دائرة المعارف الاسلامية .
دائرة المعارف الايطالية .
قدري حافظ طوقان : تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك . طبعة ثانية ، مصر ١٩٥٤ .
L. C. KARPINSKI, *Latin Translation of the algebra of Al Khwarismi*. Univ. of Michigan, 1915.
L. RODET, *L'Algèbre d'Alkhârizmi*, *Journal Asiatique* . 1878, 7^e série, Tome XI, p. 5.

مطلحات

نورد في ما يلي المصطلحات الرياضية ، مع مقابلها باللغة الفرنسية ، حسب الترتيب الذي ذكرت فيه في هذا البحث . ونحن نشير الى الصفحة والسطر بعددين مثلاً ص ٩/٤

	سطر	صفحة
Première puissance de l'inconnu . جذر ج جذور	٩	٤
Carré de l'inconnu . مال ج اموال .	٩	٤
Terme constant مال مفرد	٩	٤
Equations du 1er et du 2e degré . معادلات من الدرجة الاولى والثانية	١٣	٤
Nombres négatifs اعداد سلبية	١٧	٤
Nombres arithmétiques اعداد حسابية	١٧	٤
Nombres positifs اعداد موجبة	١٨	٤
Nombres imaginaires اعداد وهمية	١	٥
Solution négative الحلّ السلبى	٣	٥
Symbolisme الرمزية	٦	٥
Extraction des racines . التجذير .	٨	٥
Egalité . مساواة .	٨	٥
Inégalité مناقصة .	٨	٥
Inconnus . مجاهيل .	٨	٥
Connus . معلومات .	٨	٥
Formule الدستور .	٥	٦
Mécanisation des solutions آلية الحلول	١٣	٦
Membre de l'équation تعديل	٢١	٦
Racine ou solution de l'équation . جذر المعادلة .	١٢	٧
Nombre abstrait . عدد مجرد .	٩	٩
Binôme عبارة ثنائية	٢٣	١٣
Racines (des nombres) . جذور .	٥	١٥
Côté ضلع ج اضلاع .	١	١٧
Hauteur عمود .	٣	١٧

في ما يلي ، المعادلات الواردة في هذا البحث ، منقولة الى الفرنسية مع الاشارة الى الصفحة :

Page 5 fin

$$x^2 = 4x(10 - x) = 40x - 4x^2$$

$$40x = 5x^2; x = 8$$

Page 6 fin

$$x^2 + 10x = 39$$

$$2x^2 + 10x = 48$$

$$\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$$

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

Page 7 début

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad b' = \frac{b}{2}$$

$$x^2 + 10x = 56$$

$$x^2 + 10x - 56 = 0$$

$$x = -5 \pm \sqrt{5^2 + 56}$$

$$x = -5 \pm \sqrt{81}$$

$$x = -5 \pm 9$$

$$x = 4 \quad x = -14$$

Page 9 début

$$40 + x = 3(4 + x)$$

$$5x + 10(30 - x) = 245$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6}$$

Page 12

$$ax = b$$

$$ax^2 = cx$$

$$ax^2 = c$$

$$ax^2 + bx = c$$

$$ax^2 + c = bx$$

$$ax^2 = bx + c$$

où a, b, c sont des nombres positifs.

$ax^2 + bx + c = 0$, où a, b, c sont des nombres algébriques.

$$x^2 = 5x$$

$$\frac{1}{2}x^2 = 4x$$

$$5x^2 = 10x$$

Page 12 fin

$x^2 = bx$ ou $x^2 - bx + c = 0$. Cette équation a deux racines distinctes si $b'^2 - c > 0$; elle a deux racines égales si $b'^2 - c = 0$, $x' = x'' = b'$; elle n'a pas de racines si $b'^2 - c < 0$.

Page 15 fin

$$\begin{aligned}x^2 + (10 - x)^2 &= 58 \\2x^2 - 20x + 100 &= 58 \\2x^2 + 100 &= 58 + 20x \\x^2 + 50 &= 29 + 10x \\x^2 + 21 &= 10x\end{aligned}$$

Page 16 début

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2} &= \frac{1}{2} \\\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} &= 2 \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Page 17 début

$$\begin{aligned}15^2 - (14 - x)^2 &= 13^2 - x^2 \\x &= 5\end{aligned}$$

Page 17 fin

$$\frac{8 \cdot 12}{2} = x^2 + \frac{x(8-x)}{2} + 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(6 - \frac{x}{2}\right)$$

PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITÉ LIBANAISE
SECTION DES ÉTUDES MATHÉMATIQUES

I

NOTES
SUR L'«ALGÈBRE»
D'AL - HWARIZMĪ

PAR

ADEL AMBOUBA

Professeur de Mathématiques à l'Université Libanaise



BEYROUT
1968